



TITLE:

Von Neumann代数の自己同型写像群と不変汎函数について (作用素環の自己同型写像について)

AUTHOR(S):

斎藤, 和之

CITATION:

斎藤, 和之. Von Neumann代数の自己同型写像群と不変汎函数について (作用素環の自己同型写像について). 数理解析研究所講究録 1972, 166: 18-30

ISSUE DATE:

1972-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106965>

RIGHT:

von Neumann 代数の自己同型写像群と 不変汎函数について

東北大理 斎藤 知之

von Neumann 代数 M の $*$ 自己同型写像群 G を dual pair (M_*, M) (M_* は M の predual) の中で, 非可換力学系の変換群としてとらえるべく, G 不変正規正值線形汎函数 (不変測度) の存在条件を M_* の弱 compact 集合を使用して調べ, あわせて M に与える " G -有限性" (不変測度が充分沢山ある) と Murray-von Neumann の " G -有限性" の差を浮き彫りにしよう。

M を Hilbert space \mathcal{H} 上に作用する von Neumann 代数 (v. N. 代数) とし, G を M の unitarily implementされた $*$ -automorphisms の a group とする。すなわち $g \rightarrow u_g$ (G の \mathcal{H} 上の unitary 表現) が $u_g^* M u_g = M_g$ ($\forall g$) を満たして存在する。今後 $a_g = u_g^* a u_g$ $\forall a \in M$ と書く。

Definition 1 (Størmer). 今 e, f を M の射影元とし, $e \overset{G}{\sim} f$ (G -equivalent) であるとは, 各 $g \in G$ に対して, $e = \sum_{j \in G} u_g a_j a_j^*$, $f = \sum_{j \in G} u_g^* a_j^* a_j u_g$ なる $a_j \in M$ が存在するとき

であり, $e \overset{G}{\sim} f$ ($e \overset{G}{\sim} f$) とは, ecf の, fce と G -equivalent な部分射影元の存在するときである。

● M と G の接合積を使用することにより上の $\overset{G}{\sim}$ は確かに同値関係になりさらに完全加法的であることがわかる。すなわち $\{e_\alpha\}, \{f_\alpha\}$ を M の射影元の直交族とし各 α に対して, $e_\alpha \overset{G}{\sim} f_\alpha$ ならば, $\sum e_\alpha \overset{G}{\sim} \sum f_\alpha$ である。

● M が abelian, σ -finite の場合, 上の $\overset{G}{\sim}$ は, Hopf の確率空間に導入した equivalence (Hopf-equivalence) と同値になり, M が一般の場合は, Murray, von Neumann の導入した equivalence (\sim) を含む (Størmer [6])。

次に \mathcal{U} を M の, M の unitary 元により implement される inner automorphisms 全体のつくる group とし, \tilde{G} を G と \mathcal{U} により代数的に生成される automorphism group とする。

その時, equivalence relation $\overset{G}{\sim}$ に関して次のような比較定理が成立する。

Proposition 1. M の射影元の対 e, f に対して, M の \tilde{G} による fixed subalgebra $M^{\tilde{G}}$ (M の G による fixed subalgebra を M^G とし, M の center を \mathcal{Z} とすると, $M^{\tilde{G}} = M^G \cap \mathcal{Z}$) の射影元 z が, $ez \overset{G}{\sim} fz$, $e(1-z) \overset{G}{\sim} f(1-z)$ なる如く存在する。

● abelian case は, Størmer により示された。[5]

このことを使用すると Murray-von Neumann の equivalence

の場合と同様にして次の命題が成立する。

Proposition 2. M が G -finite (i.e. $1 \stackrel{G}{\sim} e \Rightarrow e=1$) ならば、
もし M の射影元 e, f に対して、 $e \stackrel{G}{\sim} f$ が成立すれば、 $1-e \stackrel{G}{\sim} 1-f$
である。

以上の準備のもとに次のことが成立する。

Theorem 1. M が G -finite であることと、 M が \tilde{G} -finite
(i.e. M に \tilde{G} -不変 normal states (G -invariant normal traces)
が充分沢山存在する) であることは、同値である。

以下この証明をしよう。[9] と類似の方法によつた。

M は G -finite とする。

Lemma 1. e, f を M の射影元、 $\{e_k\}$ を M の射影元の単調増加列で、 $e_k \uparrow e$ 、 $e_k \stackrel{G}{\sim} f$ ($\forall k$) とする。この時、 $e \stackrel{G}{\sim} f$ ($\stackrel{G}{\sim}$ の連続性) である。

証明). $e_1 \stackrel{G}{\sim} f_1 \leq f$ とする。

$k \geq 1$ に対して、 f_1, f_2, \dots, f_k (M の射影元) が、 $f_i f_j = 0$ ($i \neq j$) ($1 \leq i < j \leq k$) 且つ $\sum_{i=1}^k f_i \leq f$ 且つ、 $e_{i+1} - e_i \stackrel{G}{\sim} f_{i+1}$ ($1 \leq i \leq k-1$) なる
如くとれたとする。 $e_{k+1} \stackrel{G}{\sim} f$ 且つ M が G -finite であるから
Prop. 2 により $1 - e_{k+1} \stackrel{G}{\sim} 1 - f$ 。従つて、 $e_k \stackrel{G}{\sim} \sum_{i=1}^k f_i$ によつて、

$$1 - e_{k+1} + e_k \stackrel{G}{\sim} 1 - f + \sum_{i=1}^k f_i$$

よつて Prop. 2 から

$$e_{k+1} - e_k \stackrel{G}{\sim} f - \sum_{i=1}^k f_i。$$

すなわち $\exists f_{k+1} \in M$: 射影元、 $e_{k+1} - e_k \stackrel{G}{\sim} f_{k+1} \leq f - \sum_{i=1}^k f_i$ 。

}

この操作をつづけることにより, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ を,

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \leq f, \quad e_{i+1} - e_i \leq f_{i+1} \quad (\forall i)$$

なる如く撰べる。従って,

$$e = e_1 + \sum_{i=1}^{\infty} (e_{i+1} - e_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} f_i \leq f.$$

以上.

Lemma 2. 今 M を Lemma 1 の仮定のもとに M の predual M_* に於いて, $(T_g \varphi)(a) = \varphi(a^g)$ $\varphi \in M_*$, $a \in M$, $g \in \tilde{G}$ とする

(T_g は M_* の linear isometry). かくて $\varphi \in M_*$ に対して,

$$K \equiv \{T_g \varphi; g \in \tilde{G}\}$$

は, weakly $(\sigma(M_*, M))$ relatively compact である。

(証明) もしこうでなければ [1] により M の射影元列 $\{e_n\}$ 及び正の実数列 $\varepsilon (> 0)$, $\{\varphi_n\} \subset K$ があって

$$|\varphi_n(e_n)| \geq \varepsilon \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

である。 $\varphi_n = T_{g_n} \varphi$, $f_n = e_n^{g_n}$ とし, $f_n \leq e_n$ である。

今 $p_n \equiv \sum_{m=n}^{\infty} e_m$, $q_n \equiv \bigvee_{m=n}^{\infty} f_m$ とすれば, $p_n \downarrow$, $q_n \downarrow$ である。

$q \equiv \bigwedge_{n=1}^{\infty} q_n$ とする。 n fix k をおとり, $r_k = \bigvee_{i=n}^{n+k} f_i$ とする。

今 $k \geq 1$ と $r_{k-1} \leq \bigvee_{i=n}^{n+k-1} e_i$ を仮定する ($k=1$ なら $r_0 = f_n \leq e_n$)。

$$r_k = r_{k-1} \vee (r_{k-1} \vee f_{n+k} - r_{k-1}),$$

$$r_{k-1} \vee f_{n+k} - r_{k-1} \leq (\sim) f_{n+k} - r_{k-1} \vee f_{n+k} \leq f_{n+k} \leq e_{n+k}$$

から $r_k \leq \bigvee_{i=n}^{n+k} e_i$ が成立する。よって, $r_k \leq p_n$ ($\forall k$) から Lemma 1

から $q_n = \bigvee_{k=1}^{\infty} r_k \leq p_n$ ($\forall n$) である。従って $1 - q_n \geq 1 - p_n$,

$\sup_n (1 - f_n) = 1$ かつ, Lemma 1 により $1 - g \geq 1$, M の G -finiteness
 かつ $g = 0$ が成立. $g_n \geq f_n$ より $f_n \rightarrow 0$ (5) であり,
 $|f(f_n)| \geq \varepsilon$ ($n=1, 2, 3, \dots$) に矛盾する. 従って, K は weakly
 relatively compact である.

以上.

Theorem 1 の証明. M を G -finite とし $\psi \in M_{\tilde{G}}^*$ ($M_{\tilde{G}}$ の predual) ($\psi \geq 0$) とする extension theorem により
 $\varphi \in M_*$ $\varphi \geq 0$, $\varphi(c) = \psi(c)$ $\forall c \in M_{\tilde{G}}$, $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$ かつ
 φ が存在する. Δ

$\mathcal{Q}(\varphi) \equiv \overline{\text{co}} \{T_g \varphi, g \in \tilde{G}\}$ ($\overline{\text{co}}$ は $\{T_g \varphi, g \in \tilde{G}\}$
 の strong convex closure) とすれば, Krein - Šmulian
 の Theorem 及 Lemma 2 により $\mathcal{Q}(\varphi)$ は weakly compact である.
 また $\{T_g; g \in \tilde{G}\}$ は $\mathcal{Q}(\varphi)$ 上の group は, $\mathcal{Q}(\varphi)$ は non-contracting
 (distal) に, affinely に act して $\mathcal{Q}(\varphi)$ 上 (i.e. $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{Q}(\varphi), \psi_1 + \psi_2$
 に対し $\inf_{g \in \tilde{G}} \|T_g \psi_1 - T_g \psi_2\| \geq \delta > 0$ for some $\delta > 0$). 従って,
 Ryll-Nardzewski の fixed point theorem ([2]) により
 $\exists \tilde{\varphi} \in \mathcal{Q}(\varphi) : T_g \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi} \ \forall g \in \tilde{G}$ である. $\varphi \geq 0$ かつ $\tilde{\varphi} \geq 0$ であり
 $\tilde{\varphi}$ は M 上の G -不変 normal state である. 今 $t \neq 0$,
 $t \in M_{\tilde{G}}$ とする ($t \geq 0$) と, $\exists \psi \in (M_{\tilde{G}}^*)_*$ state: $\psi(t) \neq 0$. よって
 この ψ に対して, 上の $\tilde{\varphi}$ をとると, $\tilde{\varphi}(t) = \psi(t) \neq 0$. 従って,
 Kovács - Szűcs の Theorem 1 により, ([3]) M は \tilde{G} -finite である.

逆は明らかである。

以上。

この定理の σ -finite case は, Størmer により automorphism の分解定理 (free action に関する Kallman の Theorem) を使用して証明されたが複雑であった。Yeadon [9] は, $G = \mathbb{N}$ の場合上の方法で, normal trace の存在を, dimension function を全然使用せずに証明した。

今こゝで Kovács - Szűcs により与えられた G -不変測度の存在条件を述べておこう。

Kovács - Szűcs の定理。 M を \ast -N. 代数とし, G を M の \ast -automorphism group とする。今 M が G -finite (G -invariant normal states が M の正元を分離する) かつ充分沢山ある) ならば, $\forall t \in M$ に対して,

$$\tilde{co}(t, M) \cap M^G$$

は one point set である (但し $\tilde{co}(t, G)$ は, t の G による orbit の weak convex hull である)。さらに上の unique element を $\mathbb{E}_G(t)$ とすると, $t \rightarrow \mathbb{E}_G(t)$ は, M onto M^G の faithful normal G -invariant projection of norm one (G -expectation) で, すべて G -invariant normal state ϕ に対して,

$\phi = \phi \circ \mathbb{E}_G$ である。逆に M onto M^G の G -(invariant) expectation があれば, M は G -finite で, その G -expectation は $\mathbb{E}_G(\cdot)$ である。

次に G -finiteness の別の characterization を述べよう。

Theorem 2. M が G -finite であるための必要充分条件は、 M_* のかつた τ weakly relatively compact subset K に対して

$$\{T_g \varphi; \varphi \in K, g \in \tilde{G}\}$$

が τ weakly relatively compact となることである。

● 実は, Størmer は, M が G -finite であるための必要充分条件は G に関して $C(\tilde{G})$ でなない! Lemma 2 の命題が成立することであることを示した ([7])。

abelian case なら次のように記述できる。

(X, \mathcal{M}, μ) を σ -finite measure space とし, G を X 上に left operate する a discrete group $s \rightarrow ss, s \in X$ とし, μ を quasi-invariant, i.e. $\mu(ssE) = 0 \Leftrightarrow \mu(E) = 0$ all $E \in \mathcal{M}$ とする。

$$d\mu(ss) = r_s(s) d\mu(s) \text{ を Radon-derivative}$$

$$\text{としよう。} \langle a^s, f \rangle = \langle a, r_{s^{-1}}(\cdot) f(ss^{-1}\cdot) \rangle$$

に注意して,

Corollary 1. (X, \mathcal{M}, μ) が Hopf-finite であるための必要充分条件は, $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ のかつた τ weakly relatively compact subset K に対して,

$$\{r_{s^{-1}}(\cdot) f(ss^{-1}\cdot), f \in K, g \in G\}$$

が $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ で τ weakly relatively compact になることである。

$G = \mathbb{N}$ の case は次の様である。

Corollary 2. M が finite であるための必要充分条件は, $K \subset M_*$ なる K に対して weakly relatively compact subset に対して,

$$\{T_g \varphi; \varphi \in K, g \in \mathbb{N}\} = \{u^* \varphi u; \varphi \in K, u: \text{unitary of } M\}$$

が weakly relatively compact となることである。

Corollary 3. M が finite ならば, M が G -finite であるための必要充分条件は, $\forall K \subset M_*$ weakly relatively compact subset に対して,

$$\{T_g \varphi; g \in G, \varphi \in K\}$$

が weakly relatively compact となることである。

Theorem 2 の証明。以下 M が G -finite を仮定する。

1 段。 $\{\varphi_i\} \subset M_*$: $\varphi_i \rightarrow \varphi_0$ weakly ($\varphi_0 \in M_*$) とし, $\{a_n\}$ は M の unit sphere S の sequence で, 0 に strongly に収束するものとする。この時,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_i(a_n^2) = 0 \quad \text{uniformly for } i=1, 2, 3, \dots, \varphi \in \tilde{G}$$

である。

証明) $\varphi = \sum \frac{|\varphi_i|}{2^i \|\varphi_i\|}$ とし, φ の M に於ける台を e_φ とし, e_φ の $M^G \cap \mathcal{Z} (= M^{\tilde{G}})$ に於ける台を $z^G(e_\varphi)$ とする。この時, $M_{z^G(e_\varphi)}$ 上に \tilde{G} は natural に act するから $M_{z^G(e_\varphi)}$ は, G -finite

である。さらに $M_{ZG(e_g)}$ は, σ -finite である。というのは,
 $M_{ZG(e_g)}$ に於ける \tilde{G} の fixed subalgebra は, $(M^G \cap Z)_{ZG(e_g)}$ であり,
 従って Kovács の定理から $M_{ZG(e_g)}$ onto $(M^G \cap Z)_{ZG(e_g)}$
 への faithful normal \tilde{G} -invariant projection of norm one
 が存在するので, $(M^G \cap Z)_{ZG(e_g)}$ が σ -finite を示せば充分である。
 φ の $M^G \cap Z$ に於ける台を $e_{g'}$ とすると $ZG(e_g) \leq e_{g'}$ である
 からこれは明らかである。又 $\varphi_i(a) = \varphi_i(a ZG(e_g)) \quad \forall a \in M, \forall i$
 となるから M を σ -finite と仮定して, 一般性を失なわぬ。
 よって, Theorem 1 から, M には, faithful normal G -invariant
 trace が存在する。これを τ としよう。

$S \ni x, y$ に対して,

$$d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \tau((x-y)^*(x-y))^{1/2}$$

とすると (S, d) は, complete metric space である。

$$H_i \stackrel{\text{def}}{=} \{ a \mid a \in S \mid |\varphi_j(a) - \varphi_0(a)| \leq \varepsilon \quad \forall j \geq i \}$$

とすれば, H_i は closed で, $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ となる。

従って Baire の Theorem によつて, $\exists a_0 \in S; \exists \beta > 0$ (real);
 $\exists j_0: S \cap \{ a \mid d(a, a_0) \leq \beta \} \subset H_{j_0}$ となる。

M が finite algebra であるから命題を示すには, $a_n = a_n^*$
 として一般性を失なわぬ。従つて M の射影元の列 $\{ e_n \}$ が,
 $e_n \rightarrow 1$ (s), $\| a_n e_n \| \leq \varepsilon/6 \quad n=1, 2, 3, \dots$ なる如く存在する。

$$\| (a_n e_n)^g \| = \| a_n e_n \| \quad \forall g \in \tilde{G} \text{ に注意して,}$$

$$\begin{aligned}
& |(q_j - q_0)(a_n^g)| \\
& \leq |(q_j - q_0)(e_n^g a_n^g e_n^g)| + |(q_j - q_0)(e_n^g a_n^g (1 - e_n^g))| \\
& \quad + |(q_j - q_0)((1 - e_n^g) a_n^g e_n^g)| + |(q_j - q_0)((1 - e_n^g) a_n^g (1 - e_n^g))| \\
& \leq \varepsilon + |(q_j - q_0)((1 - e_n^g) a_n^g (1 - e_n^g))|
\end{aligned}$$

とある。

今 $b_n(g) \equiv e_n^g a_0 e_n^g + (1 - e_n^g) a_n^g (1 - e_n^g) \in S$ とする。

$$\begin{aligned}
& \tau((b_n(g) - a_0)^*(b_n(g) - a_0))^{1/2} \\
& \leq \tau((1 - e_n^g) a_n^g (1 - e_n^g) a_n^g (1 - e_n^g))^{1/2} \\
& \quad + \tau((1 - e_n^g) a_0^* (1 - e_n^g) a_0 (1 - e_n^g))^{1/2} \\
& \quad + \tau((1 - e_n^g) a_0^* e_n^g a_0 (1 - e_n^g))^{1/2} \\
& \quad + \tau(e_n^g a_0^* (1 - e_n^g) a_0 e_n^g)^{1/2} \\
& \leq 3\tau(1 - e_n^g)^{1/2} + \tau(1 - e_n^g) a_0 e_n^g a_0^* (1 - e_n^g)^{1/2} \\
& \leq 4\tau(1 - e_n^g)^{1/2} = 4\tau(1 - e_n)^{1/2}.
\end{aligned}$$

従って $\tau(1 - e_n) \rightarrow 0$ (s) かつ g は independent に $n_0(\beta)$ が (自然数) とれ、

$$\tau((b_n(g) - a_0)^*(b_n(g) - a_0))^{1/2} < \beta \quad \forall n \geq n_0(\beta).$$

又 $e_n^g a_0 e_n^g \in S$ かつ

$$\tau((e_n^g a_0 e_n^g - a_0)^*(e_n^g a_0 e_n^g - a_0))^{1/2} \leq 3\tau(1 - e_n)^{1/2}$$

かつ $\exists n_1(\beta)$ (g は independent) (自然数) :

$$3\tau(1 - e_n)^{1/2} < \beta \quad \forall n \geq n_1(\beta).$$

今 $n \geq n_0(\beta) \vee n_1(\beta)$ とすると、

$$|(\varphi_j - \varphi_0)((1 - e_n^g) a_n^g (1 - e_n^g))| \leq 2\varepsilon$$

$\forall j \geq j_0$ によって, 全体として,

$$|(\varphi_j - \varphi_0)(a_n^g)| \leq 3\varepsilon \quad \forall j \geq j_0, \quad \forall n \geq n_0(\beta) \vee n_1(\beta).$$

残りの $|(\varphi_j - \varphi_0)(a_n^g)|$, $j=1, 2, \dots, j_0-1$, ($\forall g \in \tilde{G}$) の部分
は, 次のようである。

$$\{T_g(\varphi_j - \varphi_0), T_g\varphi_0, j=1, 2, \dots, j_0-1, g \in \tilde{G}\}$$

は, Theorem 1 の証明からわかるように weakly relatively compact である。よって Akemann [1] の定理により, $\exists \Psi \in M_*$, $\Psi \geq 0$: $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists \delta > 0$:

$$\Psi(a^*a + aa^*) < \delta \quad (a \in S) \Rightarrow \underbrace{|(T_g(\varphi_j - \varphi_0))(a)| < \varepsilon,}_{|T_g\varphi_0(a)| < \varepsilon}$$

$$\forall g \in \tilde{G}, j=1, 2, 3, \dots, j_0-1$$

である。今 $a_n \rightarrow 0 \quad (S)$ から $\exists n_2(\varepsilon): \forall n \geq n_2(\varepsilon)$ に対して,

$$|(\varphi_j - \varphi_0)(a_n^g)| < \varepsilon, \quad |\varphi_0(a_n^g)| < \varepsilon$$

$\forall g \in \tilde{G}, j=1, 2, 3, \dots, j_0-1$ 。従って, 前半とあわせて,

$$\left. \begin{aligned} |(\varphi_j - \varphi_0)(a_n^g)| &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \\ |\varphi_0(a_n^g)| &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\} \text{uniformly for } g \in \tilde{G}, j=1, 2, \dots.$$

よって $|\varphi_j(a_n^g)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ uniformly for $g \in \tilde{G}, j=1, 2, 3, \dots$ 。

今定理の証明をする。 $\{T_g\varphi, \varphi \in K, g \in \tilde{G}\}$ が weakly relatively compact であることをいうには, かつてな $\{e_n\}$ M の射影元の直交列に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(e_n^g) = 0 \quad \text{uniformly for } g \in \tilde{G}, \varphi \in K$$

をいえる。もしそうでなければ、 $\exists \{e_n\} : \exists \varepsilon_0 > 0$

$\exists n_k (n_k \uparrow) (k=1, 2, \dots) \exists g_k \in \widehat{G}, \exists \varphi_k \in K \ k=1, 2, 3, \dots :$

$$(*) \quad |\varphi_k(e_{n_k}^{g_k})| \geq \varepsilon_0, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

Eberlein - Šmulian の Theorem から $\exists \{\varphi_{k_p}\} \subset \{\varphi_k\} : (k_p \uparrow \infty)$

$\varphi_{k_p} \rightarrow \varphi_0$ weakly $(p \rightarrow \infty)$, $\exists \varphi_0 \in M_*$ である。 $\varphi_{k_p} \rightarrow 0$

(S) から 前半により,

$$\varphi_{k_p'}(e_{n_{k_p}}^{g'}) \rightarrow 0 \ (p \rightarrow \infty) \text{ uniformly for } p', g' \in \widehat{G}$$

となり (*) に矛盾する。よって $\{\varphi \circ g; \varphi \in K, g \in \widehat{G}\}$ は,

weakly relatively compact である。

逆は, Theorem 1 及び, Kovács - Szűcs の Theorem による。

以上。

G -finite でも G -finite でない例が沢山あるし, Corollary 3 を一般の場合に拡張することが今後の問題となろう。

文 献

- [1] C. A. Akemann : The dual space of an operator algebra,
Trans. Amer. Math. 126 (1967), 286-302.
- [2] F. P. Greenleaf : Invariant means on topological
groups, Van Nostrand, New York (1969).
- [3] I. Kovács - J. Szűcs : Ergodic type theorems in
von Neumann algebras, Acta Sci. Math., 27 (1966),

233-246.

- [4] S. Sakai: C^* -algebras and W^* -algebras, Springer.
- [5] E. Størmer: Large groups of automorphisms of C^* -algebras, Comm. Math. Phys. 5 (1967), 1-22.
- [6] _____: Automorphisms and equivalence in von Neumann algebras, To appear.
- [7] _____: Invariant states of von Neumann algebras, To appear.
- [8] _____; Invariant measures and von Neumann algebras, unpublished.
- [9] F. J. Yeadon: A new proof of the existence of a trace in a finite von Neumann algebra, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 257-260.
- [10] T. Hamachi: Construction of the finite center-valued relative dimension function of a W^* -algebra, and invariant measures, To appear.
- [11] K. Saitō: Automorphism groups of von Neumann algebras and Ergodic type theorems, To appear.